

## VII. Математические вопросы

### КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

А.М.Молчанов

Институт биологической физики АН СССР, Пущино-на-Оке

Сам факт созыва Второго всесоюзного симпозиума по колебательным процессам в биологии достаточно многозначителен. Теперь уже нет сомнения, что большое число исследователей в различных областях биологии понимают и ценят "колебательный стиль мышления". Поэтому агитация в пользу того, что "такое бывает" уже перестала быть первоочередной задачей. Колебания, с другой стороны, еще не стали модой и поветрием, и было бы очень хорошо, если бы они и не стали ими никогда. Из других примеров стремительного внедрения новых идей в многострадальную биологию очень хорошо известно, сколь велики ненужные издержки.

Главный стимул настоящего сообщения – убеждение, что своевременно и четко поставленный вопрос о границах применимости новой идеи или теории помогает сохранить их внутреннюю науч-

ную ценность и уберечь от возможной инфляции.

В общей форме вопрос о границах применимости неясно как поставить. Разумно поэтому ограничение более узким вопросом — о роли колебательных режимов в математических моделях. Пусть имеется какой-нибудь объект (не обязательно биологический), для которого построена математическая модель, описывающая его поведение. Ограничимся еще более частным случаем, когда эта модель есть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, \dots, x_k; \alpha_1, \dots, \alpha_l) \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, \dots, x_k; \alpha_1, \dots, \alpha_l) \\ &\dots\dots\dots \\ dx_k/dt &= f_k(x_1, \dots, x_k; \alpha_1, \dots, \alpha_l) \end{aligned} \quad (1)$$

или сокращенно,

$$dx/dt = f(x, \alpha), \quad (1)$$

зависящая от параметров  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \alpha$ .

Предположим, что в пространстве параметров имеется область, где система имеет устойчивый стационарный режим.

Теория устойчивости Ляпунова позволяет, в частности, найти границы устойчивости — линии нейтральности. Для этого нужно найти стационарную точку системы (1)

$$f(x_0, \alpha) = 0, \quad (2)$$

$$x_0 = x_0(\alpha), \quad (3)$$

линейизовать систему в этой точке, т.е. найти матрицу ее

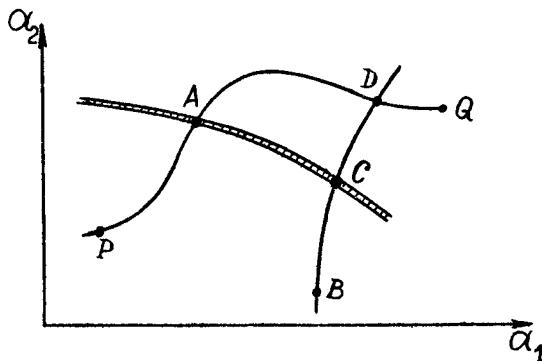


Рис. 1. Структурный портрет системы. Линии АС и ВС – границы устойчивости. Линия PADQ – путь развития системы.

частных производных

$$A(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_{x=x_0} \quad (4)$$

и, решив характеристическое уравнение

$$\det|A - \lambda E| = 0 , \quad (5)$$

найти все  $k$  собственных чисел нашей системы, которые будут, конечно, функциями параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ :

$$\lambda_m = \lambda_m(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \quad 1 \leq m \leq k \quad (6)$$

"Добрая половина" этих собственных чисел будут, конечно, комплексными:

$$\lambda = p + i\omega , \quad (7)$$

и часть границ устойчивости, как это вытекает из теории Ля-

пунова, определяется обращением в нуль действительных частей

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = 0 \quad (8)$$

этих характеристических чисел.

Если система "в процессе развития", т.е. (в нашей модели) при движении ее параметров вдоль некоторой кривой  $PADQ$ , пересекает в точке  $A$  такую линию нейтральности, то в системе неминуемо возникает колебательный режим.

Это и есть математическая причина, по которой колебательные процессы встречаются достаточно часто, чтобы быть важным предметом исследования.

Не следует, однако, забывать и про другую менее "добрую половину" случаев, когда развитие системы происходит через точку  $B$ , лежащую на линии обращения в нуль одного из действительных корней

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = 0.$$

Явления, происходящие при переходе через такую линию бифуркации, тоже весьма интересны и моделируют, например, простейшие свойства такого важного процесса, как дифференцировка ткани.

Можно думать, что единое понимание и колебательной, и бифуркационной критичности - наиболее плодотворный подход, во всяком случае, к математическим моделям. Еще одно "усилиительное" замечание. Предположим, что система в своем развитии пересекла десять критических линий. Может, конечно, случиться, что все они были чисто колебательными. Но это всего лишь один

из  $2^{10} = 1024$  возможных маршрутов развития. На любом другом пути развития необходимо (равноправное с колебательным) изучение бифуркационного типа усложнения системы.

#### OSCILLATORY STATES AS A SPECIAL CASE OF CRITICAL STATES

A.M.Molchanov

Institute of Biophysics, Acad. Sci. USSR, Puschino on Oka

The question is raised of the necessity of a unified approach to the critical states study. Critical states are considered to be an important and highly informative stage of research (and evolution) of any system. However, in the process of formation of a sufficiently complicated structure relaxation states are of no less importance. The scheme of analysis of mathematical models of critical states is given.